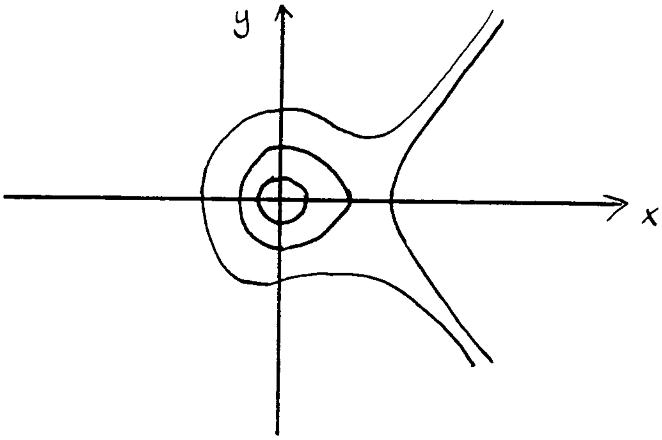
Gewone differentiaalvergelijkingen
Cursus 1999-2000.
Tentamen 25 februari 2000, duur: 3 uur.

1.[1] Beschouw het beginwaardeprobleem: $y' = \sqrt{y}$, $y(x_0) = y_0$.
(a)[1] Bepaal de grootste deelverzameling D van punten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor het beginwaardeprobleem *tenminste* één oplossing heeft. Verklaar je antwoord. Welke stelling gebruik je?
(b)[3] In welke punten van D is het rechterlid van de differentiaalvergelijking locaal Lipschitz in de y-variabele en in welke niet? Verklaar je antwoord.
(c)[2] Bepaal alle oplossingen van $y' = \sqrt{y}$, $y(x_0) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. (Denk aan de stationaire oplossing.) Betrek deze oplossingen in je antwoord op de volgende onderdelen.
(d)[1] Bepaal de grootste deelverzameling van punten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor het beginwaardeprobleem *precies* één oplossing heeft. Verklaar je antwoord. Welke stelling gebruik je?
(e)[2] Toon aan dat *elke* (maximale) oplossing van het beginwaardeprobleem gedefinieerd is op de hele $\mathbb{R}$. (Aanwijzing: Maak een schets van alle oplossingen, en "plak oplossingen aan elkaar.")

2.[1] Beschouw het systeem van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x + x^2 \end{cases}$$

Het faseportret zonder richtingaanduiding ziet er als volg uit:



(a)[1] Neem het faseportret over. Geef aan hoe de krommen worden doorlopen als $t \to +\infty$. Verklaar je antwoord.
(b)[3] Bepaal de differentiaalvergelijking voor y als functie van x en los die vervolgens op.
(c)[3] Verklaar het bestaan van periodieke oplossingen en bepaal de familie van alle periodieke oplossingen. (Aanwijzing: Geef bijvoorbeeld aan voor welke waarden van de integratieconstante c in de beschrijving (b) van alle oplossingen, de oplossing periodiek is. Geef de periodieke oplossingen ook aan in het faseportret. Binnen welk gebied liggen ze ongeveer?)
(c)[2] Wijs in het faseportret de stabiele punten aan en onderzoek de stabiliteit van de oplossingen (instabiel, stabiel, asymptotisch stabiel). Verklaar je antwoord aan de hand van het faseportret. (Er wordt geen ε-δ verhaal van je verwacht.)

Z.O.Z.

3.[1] Beschouw het beginwaardeprobleem

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a)[4] Bepaal de fundamentele matrix $Y(t)$ van de homogene vergelijking met $Y(0) =$ de identiteit. Geef duidelijk de gevolgde methode aan. (Uitsluitend ter controle: $Y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$.)
(b)[5] Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem. Wat is de algemene formule? Controleer je antwoord. (Zonder narekenen mag je gebruiken dat: $\int_0^t s e^{as} ds = \frac{1}{a} t e^{at} + \frac{1}{a^2}(1 - e^{at})$.)

4.[1,9] Bepaal de algemene oplossing van

$$y'' - \cos x\, y' + \sin x\, y = \cos x e^{\sin x},$$

als gegeven is dat $\varphi(x) = e^{\sin x}$ een oplossing is van de homogene vergelijking. (Aanwijzing: Stel dat de oplossing y van de vorm is $y = \varphi u$. Bepaal de inhomogene differentiaalvergelijking waaraan $v = u'$ moet voldoen en los deze op. Niet elke integraal is te vereenvoudigen.)

5.[1](a)[2] Bewijs dat voor iedere continue functie $f(x)$ op $[0, \frac{\pi}{2}]$ het randwaardeprobleem

$$y'' - 2y' + 2y = f(x), \quad y(0) + y'(0) = y(\frac{\pi}{2}) + y'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

precies één oplossing heeft. Welke stelling gebruik je?
(b)[3] Bepaal de Greense functie voor het probleem in (a).
(c)[2,2] Bereken op twee manieren de oplossing van het probleem in (a) voor het geval $f(x) = e^x$: (i) met behulp van de Greense functie berekend in (b) en (ii) direct.